

Diseño de Elementos Mecánicos

ME-5600

Capítulo 5

Teoría de Falla por Carga Estática

Alejandro Ortiz Bernardin

www.cec.uchile.cl/~aortizb

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Chile

Contenidos del Capítulo

- Resistencia Estática
- Concentración de Esfuerzos
- Teoría de Falla por Carga Estática
- Teoría del Esfuerzo Normal Máximo
- Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo
- Teoría de la Energía de la Distorsión
- Teoría de Mohr y de Coulomb-Mohr para Materiales Dúctiles
- Teorías de Falla para Materiales Frágiles

Resistencia Estática

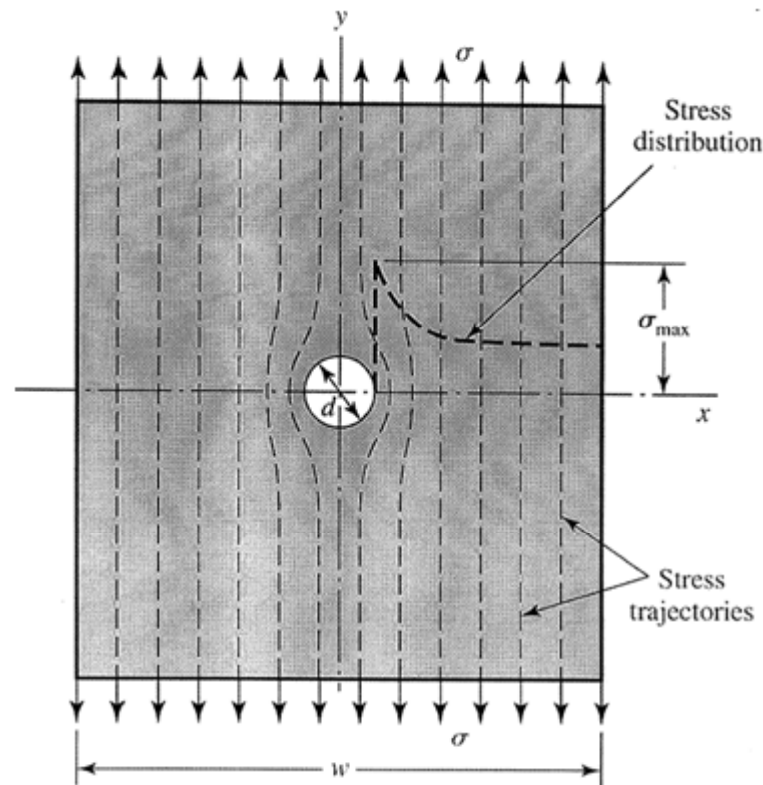
- Usualmente se necesita diseñar utilizando valores publicados de resistencia
- Datos experimentales son mejores. Se recomiendan cuando se debe fabricar grandes cantidades del mismo componente, o cuando la falla es muy costosa en tiempo, dinero, o vida humana
- Se requiere de métodos para usar valores publicados con seguridad y eficiencia para una variedad de situaciones

Concentración de Esfuerzos

- Crecimiento localizado de esfuerzos cerca de discontinuidades
- El factor teórico de concentración de esfuerzo es

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}$$



Factor Teórico de Concentración de Esfuerzos

- Gráficos disponibles para configuraciones estándar
- Ver Apéndice A del Shigley
- Muchos más disponibles en el *Peterson's Stress-Concentration Factors*
- K_t crece a medida que la discontinuidad es más pronunciada

Figure A-15-1

Bar in tension or simple compression with a transverse hole. $\sigma_0 = F/A$, where $A = (w - d)t$ and t is the thickness.

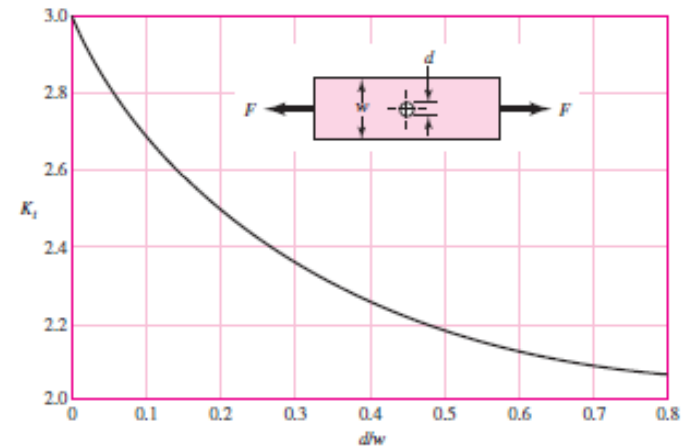
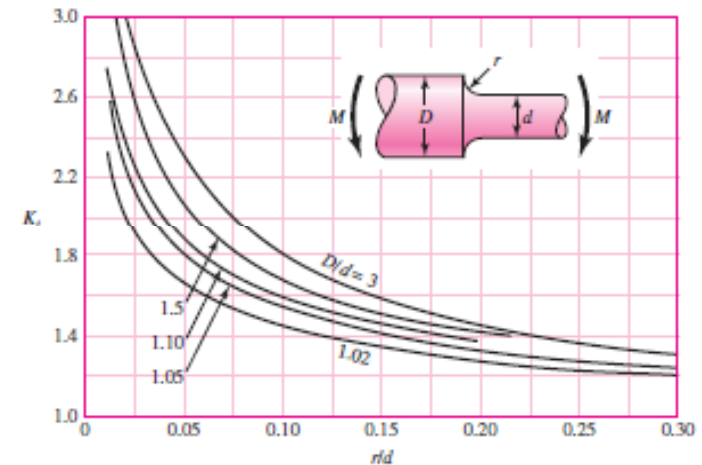


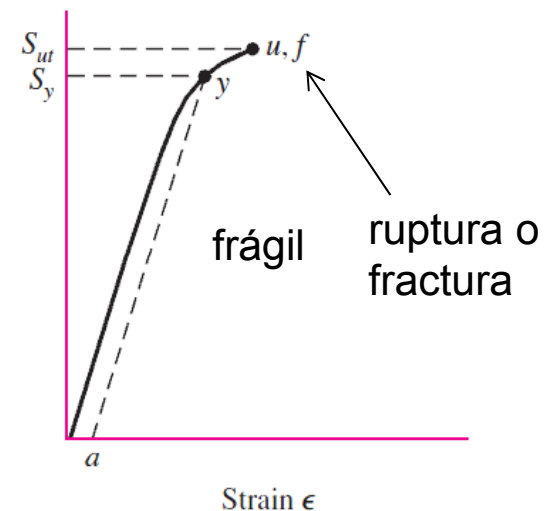
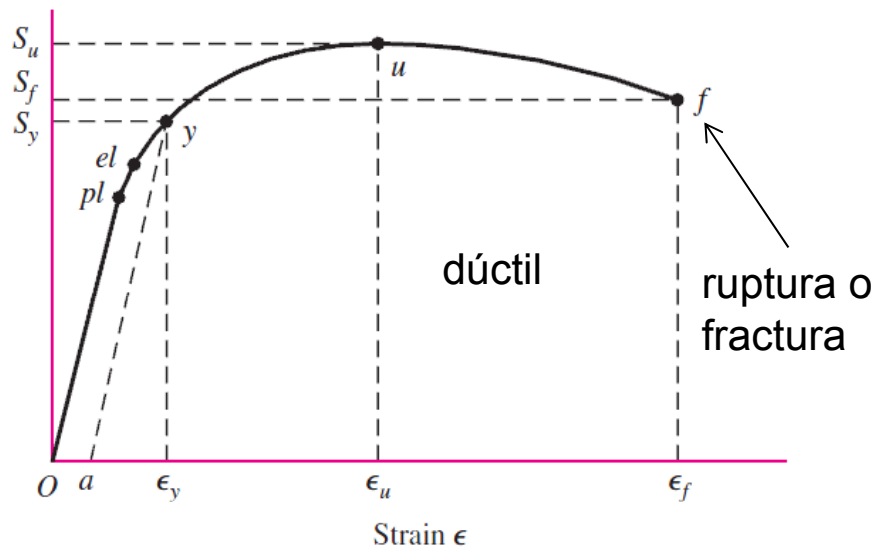
Figure A-15-9

Round shaft with shoulder fillet in bending. $\sigma_0 = Mc/I$, where $c = d/2$ and $I = \pi d^4/64$.



Material Dúctil / Material Frágil

- Un material se considera dúctil cuando $\epsilon_f \geq 0.05$, con una resistencia a la fluencia identificable que usualmente es la misma en tracción y compresión ($S_{yt} = S_{yc} = S_y$)
- Un material se considera frágil cuando $\epsilon_f < 0.05$, con una resistencia a la fluencia que no es identificable. Típicamente se clasifican por resistencias últimas a la tensión (S_{ut}) y a la compresión (S_{uc})



Factor de Concentración Condición Estática y Dúctil

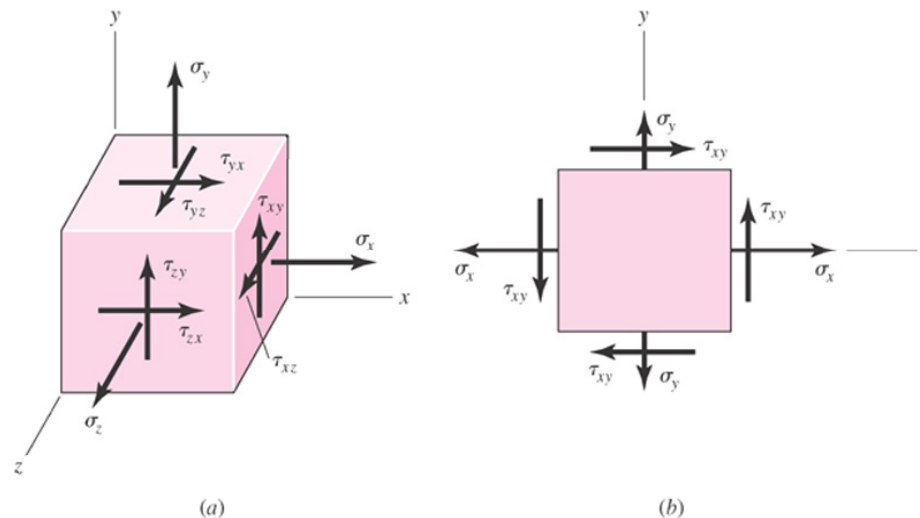
- Bajo carga estática y con materiales dúctiles
 - Las fibras localizadas en la zona de concentración fluyen (plastificación)
 - La plastificación es localizada
 - La pieza en conjunto no sufre daño a menos que el esfuerzo de ruptura sea sobrepasado
 - Efectos debido a concentración de esfuerzos son comúnmente ignorados cuando se está en presencia de carga estática con materiales dúctiles

Teoría de Falla por Carga Estática

- Elemento de esfuerzo uniaxial

$$n = \frac{\text{Resistencia}}{\text{Esfuerzo}} = \frac{S}{\sigma}$$

- Elemento de esfuerzo multiaxial
 - Una resistencia, múltiples esfuerzos
 - ¿Cómo comparar estados de esfuerzos con un valor único de resistencia?



Teoría de Falla por Carga Estática (Cont.)

- Las teorías de falla proponen un medio apropiado de comparación entre estado de esfuerzos multiaxiales con valores únicos de resistencia
- Las teorías de falla están basadas usualmente en alguna hipótesis sobre que aspecto del estado de esfuerzo es crítico
- Algunas teorías han ganado reconocimiento por su efectividad en variadas situaciones

Teoría del Esfuerzo Normal (Principal) Máximo

- Teoría: La fluencia comienza cuando el *esfuerzo principal máximo* en un elemento de esfuerzo iguala la resistencia a la fluencia
- Para cualquier elemento de esfuerzo, obtener los esfuerzos principales (usando el círculo de Mohr o un programa de elementos finitos)
- Comparar el esfuerzo principal máximo con la resistencia a la fluencia
- Sin embargo, no es una teoría segura para materiales dúctiles

Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo

- Teoría: La fluencia comienza cuando *el esfuerzo cortante máximo* en un elemento de esfuerzo iguala al esfuerzo cortante máximo en una pieza de ensayo a tensión del mismo material, cuando esa pieza comienza a ceder
- Para una pieza de ensayo a tensión, el esfuerzo cortante máximo es $\sigma_1 / 2$
- En el punto de fluencia, cuando $\sigma_1 = S_y$, el esfuerzo cortante máximo es $S_y / 2$
- Se puede reformular la teoría como
 - Teoría: La fluencia comienza cuando *el esfuerzo cortante máximo* en un elemento de esfuerzo iguala a $S_y / 2$

Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Cont.)

- Para cualquier elemento de esfuerzo, usar el círculo de Mohr o un programa de elementos finitos para encontrar el esfuerzo cortante máximo. Comparar el esfuerzo cortante máximo con $S_y / 2$
- Ordenando los esfuerzos principales tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y$$

- Incorporando un factor de seguridad n

$$\tau_{\max} = \frac{S_y}{2n} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n}$$

- Resolviendo el factor de seguridad

$$n = \frac{S_y / 2}{\tau_{\max}}$$

Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Cont.)

- Simplificando para esfuerzo plano y asumiendo que $\sigma_A \geq \sigma_B$
- Ploteamos los siguientes casos en los ejes de esfuerzos principales

- Caso 1: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$

$$\sigma_A \geq S_y$$

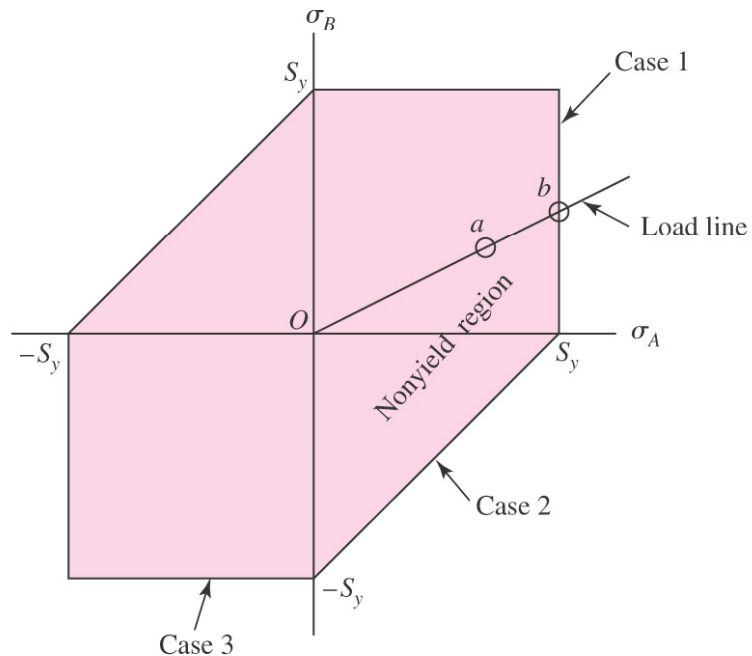
- Caso 2: $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$

$$\sigma_A - \sigma_B \geq S_y$$

- Caso 3: $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$

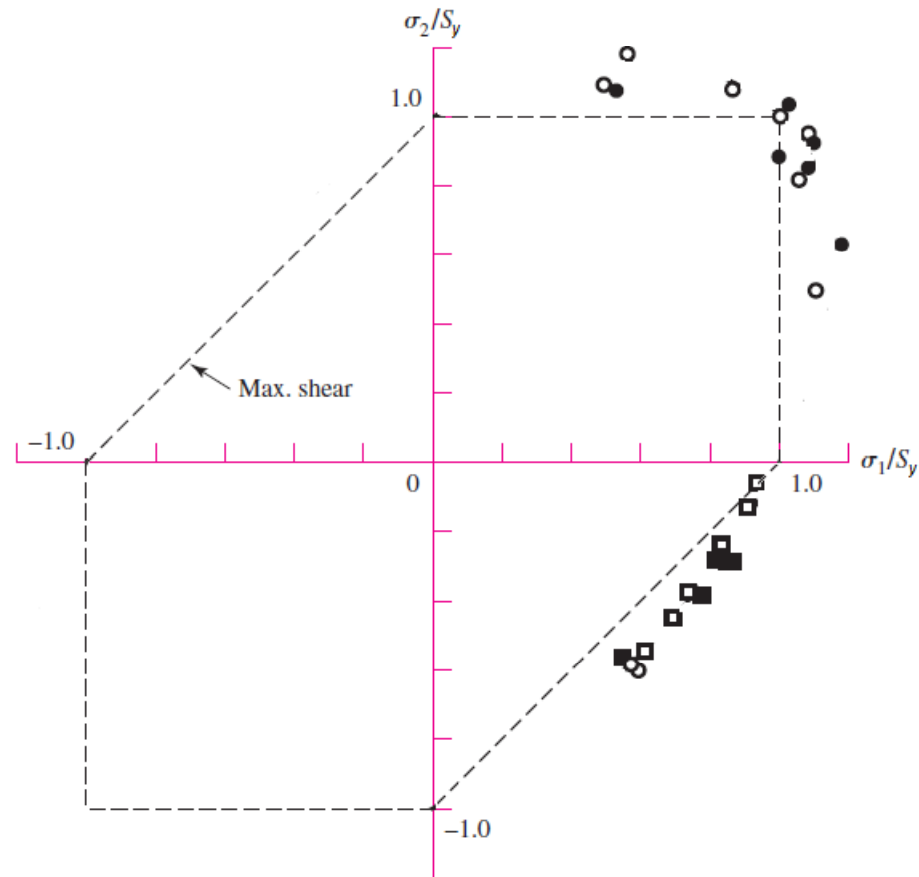
$$\sigma_B \leq -S_y$$

- Las otras líneas son casos simétricos
- La zona dentro de la curva es la zona segura



Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Cont.)

- Comparación con datos experimentales
- Conservador en todos los cuadrantes
- Criterio usualmente utilizado en situaciones de diseño con materiales dúctiles

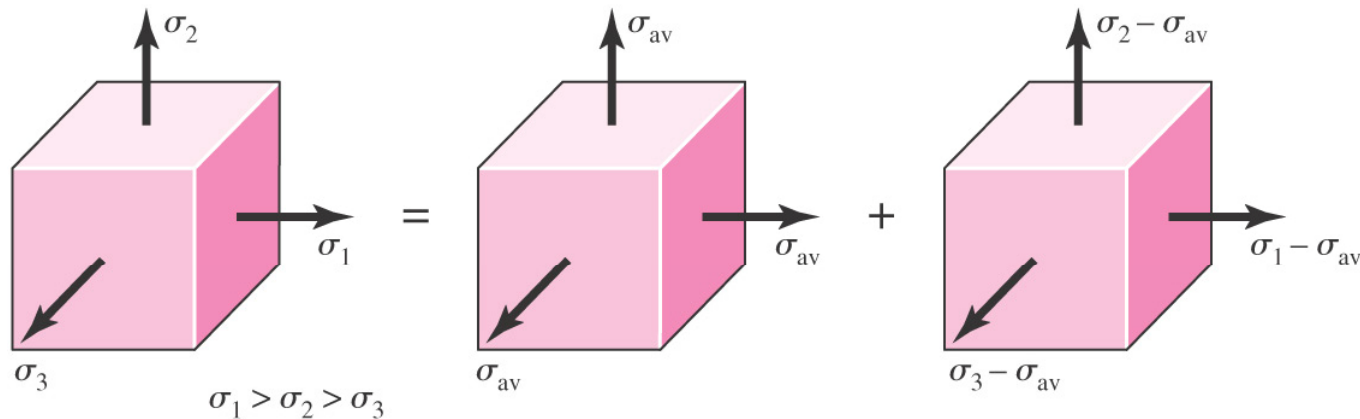


Teoría de la Energía de la Distorsión

- También conocida como
 - Teoría del esfuerzo cortante octaédrico
 - Teoría de la energía de cortante
 - Teoría de von Mises
 - Teoría de von Mises - Hencky

Teoría de la Energía de la Distorsión (Cont.)

- Se originó de la observación que los materiales dúctiles sometidos a *esfuerzos hidrostáticos* presentan resistencias a la fluencia que exceden en gran medida los valores que resultan del ensayo de tensión simple
- Postula que la fluencia no es un fenómeno de tensión o compresión simples, sino que está relacionada con la energía proveniente de la distorsión (angular) del elemento de esfuerzo



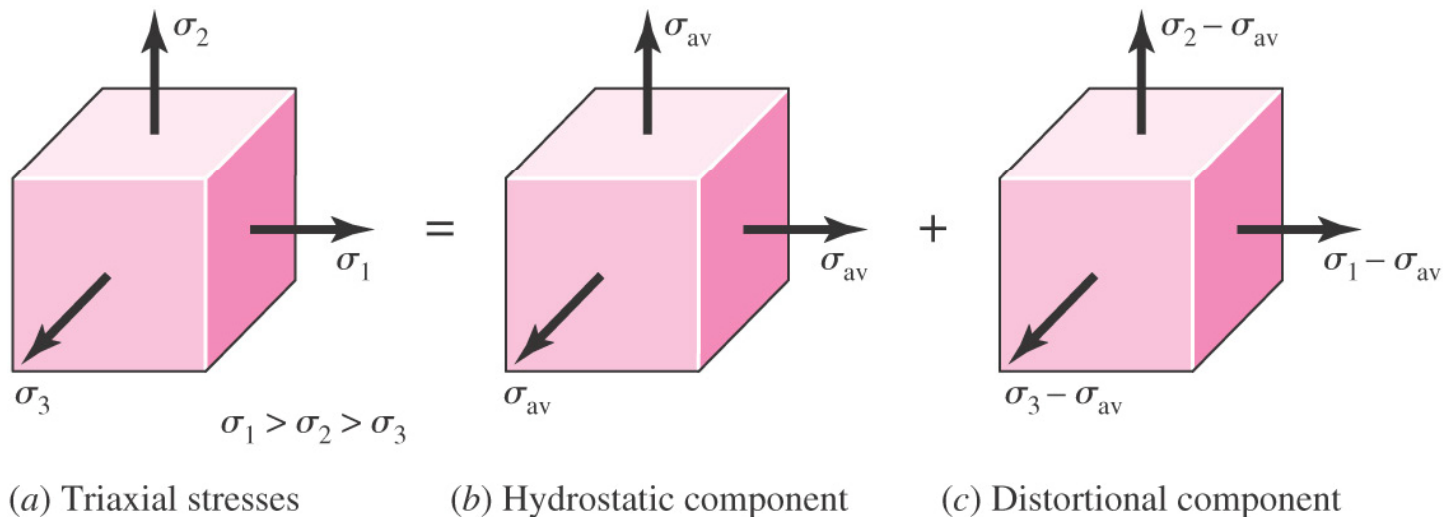
(a) Triaxial stresses

(b) Hydrostatic component

(c) Distortional component

Teoría de la Energía de la Distorsión (Cont.)

- Teoría: La fluencia comienza cuando la *energía de distorsión* por unidad de volumen iguala la energía de distorsión por unidad de volumen correspondiente a la resistencia a la fluencia en tensión o en compresión del mismo material



Teoría de la Energía de la Distorsión (Cont.)

- La energía de distorsión es (ver desarrollo en el Shigley)

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$

- Una pieza de ensayo a tensión tiene los siguientes valores cuando comienza a fluir: $\sigma_1 = S_y$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$
- La energía de distorsión para esta pieza es

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E} S_y^2$$

- La Teoría de la energía de la distorsión se obtiene igualando las dos expresiones dadas arriba

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$

Esfuerzo de Von Mises

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$

- El *esfuerzo de von Mises* es el lado izquierdo de la ecuación de arriba

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$$

- Para esfuerzo plano se simplifica a (σ_A y σ_B los esfuerzos principales no nulos)

$$\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2}$$

Esfuerzo de Von Mises (Cont.)

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$$

- En términos del eje cartesiano xyz , en tres dimensiones

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2}$$

- En términos del eje cartesiano xyz , para esfuerzo plano

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \right)^{1/2}$$

Teoría de la Energía de la Distorsión con von Mises

- El esfuerzo de von Mises puede ser pensado como un valor único de esfuerzo (*esfuerzo efectivo*) para el estado general de esfuerzo dentro de un elemento de esfuerzo
- La teoría de la energía de distorsión simplemente compara el esfuerzo de von Mises con la resistencia a la fluencia

$$\sigma' \geq S_y$$

- Introduciendo un factor de seguridad n ,

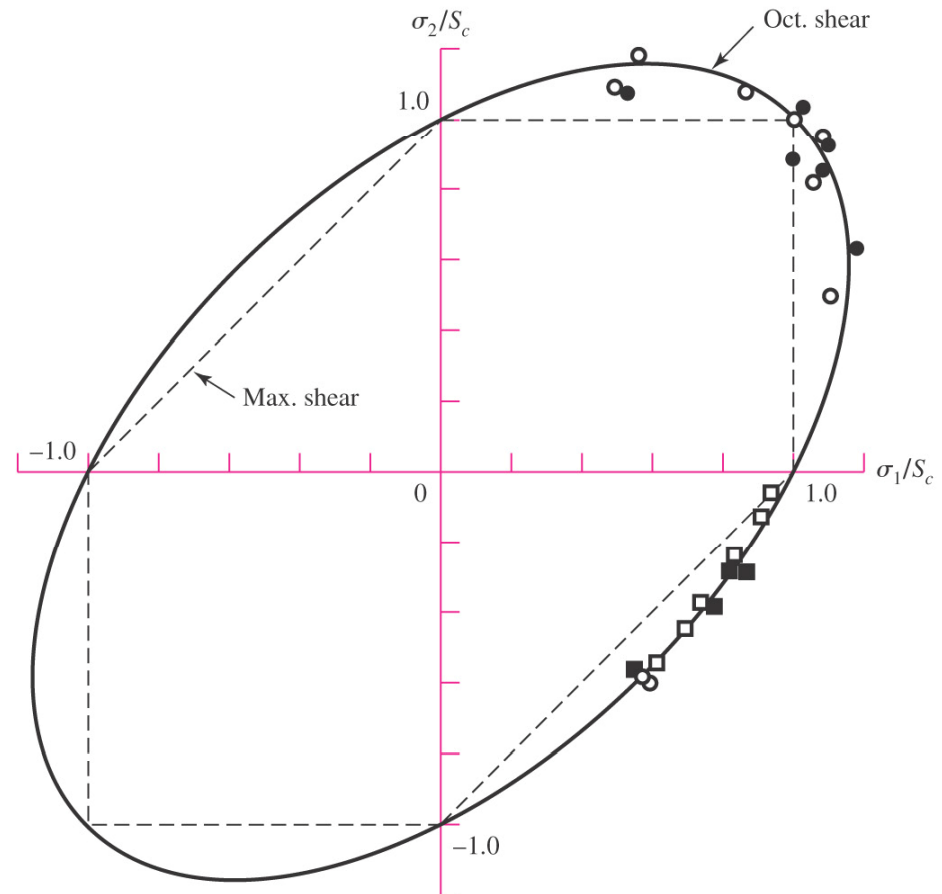
$$\sigma' = \frac{S_y}{n}$$

- Resolviendo para n ,

$$n = \frac{S_y}{\sigma'}$$

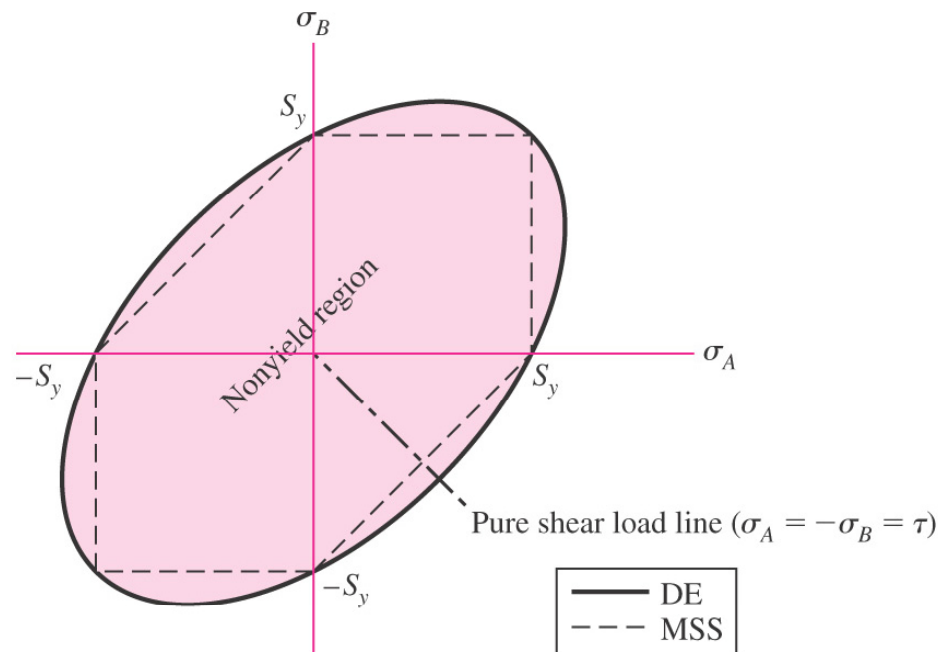
Energía de la Distorsión v/s Datos Experimentales

- Gráfico del esfuerzo de von Mises en el eje de esfuerzos principales
- Teoría de la energía de la distorsión es un criterio ampliamente aceptado para materiales dúctiles
- La teoría de esfuerzo cortante máximo se utiliza cuando se necesita un criterio más conservador



Predicciones para Esfuerzo de Corte

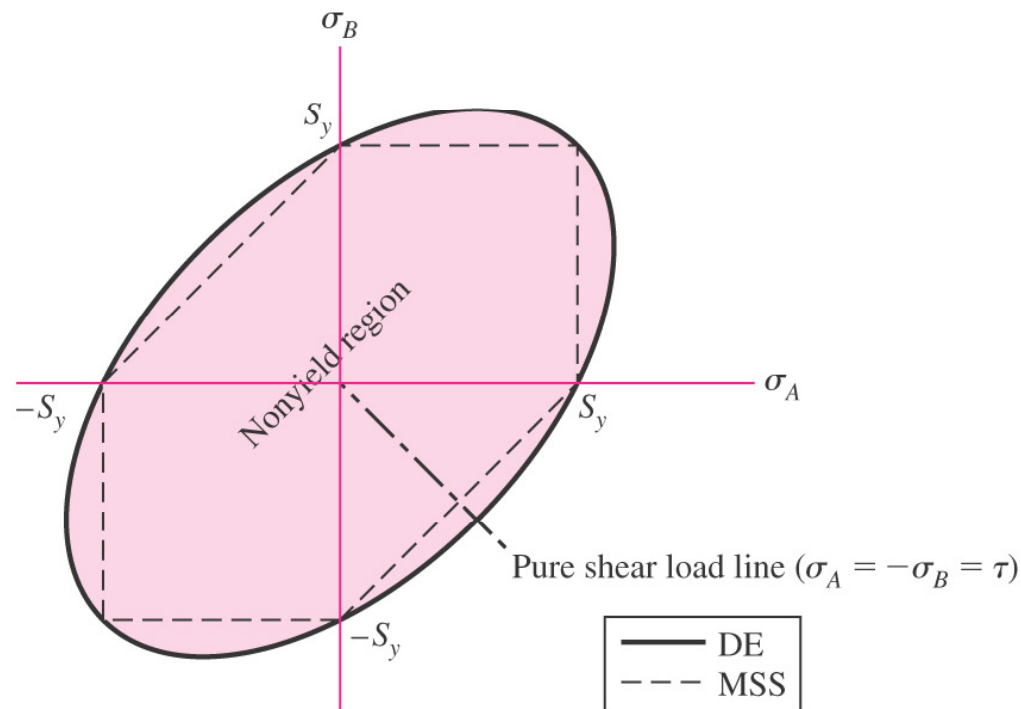
- En un estado de cortante puro, $\sigma_A = -\sigma_B = \tau$
- Ploteando la ecuación de arriba en el eje de esfuerzos principales se llega a la línea de carga para el caso de corte puro
- La intersección de la línea de carga para corte puro con la curva de falla indica que la resistencia al corte ha sido alcanzada



Predicciones para Esfuerzo de Corte

- Utilizando la teoría de esfuerzo cortante máximo se llega a

$$S_{sy} = 0.5S_y$$



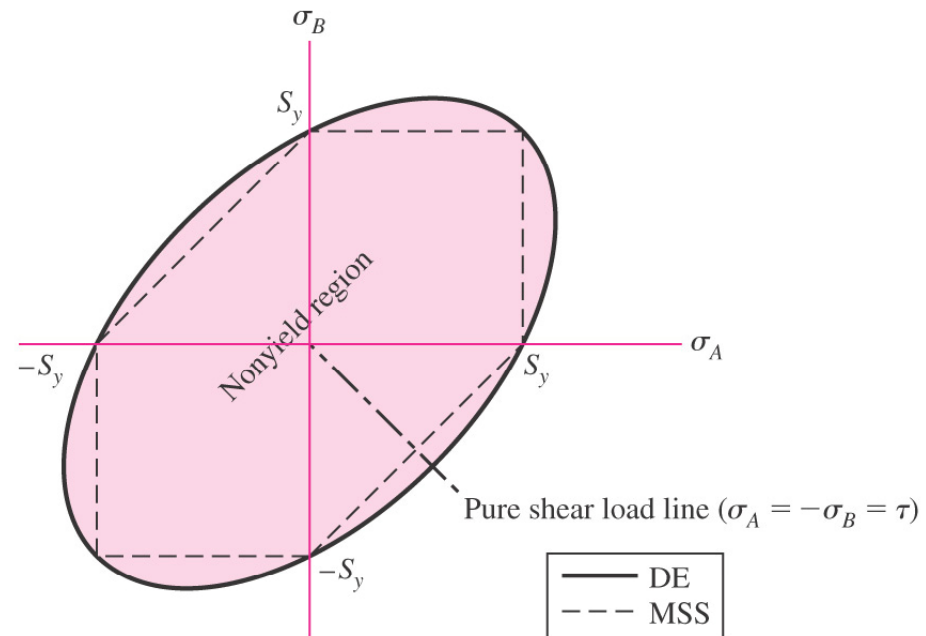
Predicciones para Esfuerzo de Corte

- Utilizando la teoría de distorsión, la intersección de la línea de carga pura con la curva de falla da

$$(3\tau_{xy}^2)^{1/2} = S_y \quad \text{or} \quad \tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577S_y$$

- Por lo tanto, la teoría de la energía de distorsión predice que la resistencia al corte es

$$S_{sy} = 0.577S_y$$



Teoría de Falla por Carga Estática

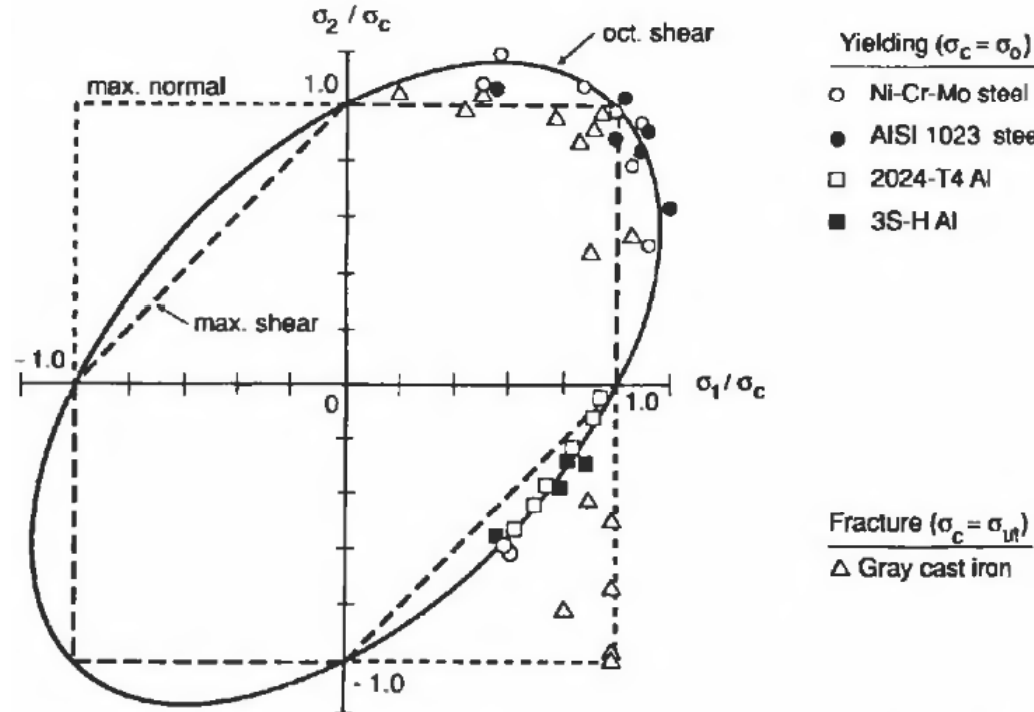


fcfm

Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Materiales Dúctiles y Esfuerzo Normal Máximo

- La teoría de esfuerzo normal máximo no es apropiada para materiales dúctiles
- Ensayos demuestran que es insegura

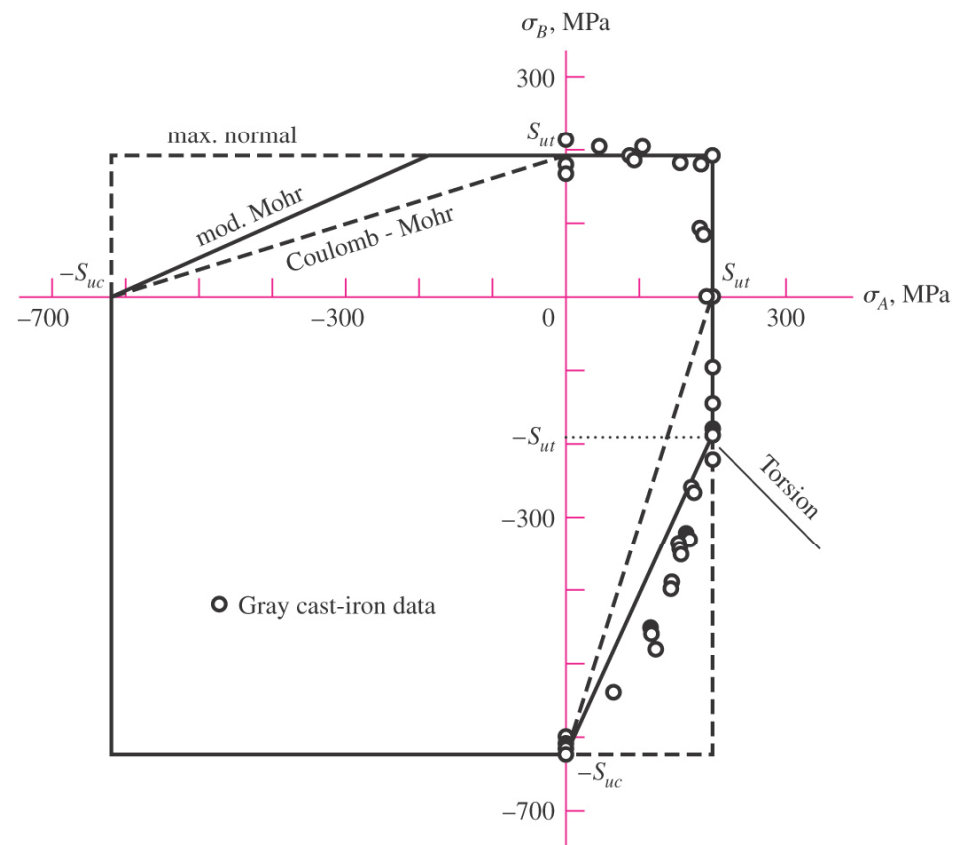


Cuando Resistencias en Tracción y Compresión Difieren

- Las teorías de *esfuerzo cortante máximo* y de *energía de distorsión* dan excelentes resultados en materiales dúctiles cuando resistencias en tracción y compresión son similares
- Si el material es dúctil pero sus resistencias difieren, otras teorías son más apropiadas (consultar Shigley)
 - Teoría de Mohr (uso complicado)
 - Teoría de Coulomb-Mohr (simplificación de la teoría de Mohr)

Teorías de Falla para Materiales Frágiles

- Datos experimentales indican algunas diferencias en las fallas de materiales frágiles
- Generalmente, el criterio de falla es la fractura en vez que la fluencia
- La resistencia a la compresión es típicamente mayor que la resistencia a la tensión



Teorías de Falla para Materiales Frágiles (Cont.)

- Teoría del esfuerzo normal máximo es insegura
- Otras teorías son más apropiadas (ver Shigley)
 - Teoría de Mohr (uso complicado)
 - Teoría de Coulomb-Mohr para materiales frágiles (conservadora)
 - Teoría de Mohr modificada (más cercana a la curva de falla típica experimental,

